

Z.K.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi I.&II.Öğretim
MAT 301 Gerçel Analiz I Güz 2009-2010 Final sınavı

Süre 90 Dakikadır

Tarih : 28.12.2009

Adı ve Soyadı :

Fakülte No :

Sorular

- $f(x) = |x|$ fonksiyonunun Fourier serisini $-\pi \leq x \leq \pi$ kümesi üzerinde hesaplayınız.
- İki basamak fonksiyonunun toplamının yine bir basamak fonksiyonu olduğunu ve

$$\int_a^b (\varphi + \psi)(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$$

olduğunu **ispatlayınız**.

- $f \in R[a, b]$ iken $f \in L^+[a, b]$ olduğunu gösteriniz.
 - $L^+[a, b]$ nın $R[a, b]$ den çok daha geniş bir küme olduğunu gösteriniz.
- Eğer L sınıfındaki fonksiyonların bir dizisi (f_n) h.h.h. bir f fonksiyonuna yakınsar ve eğer her n için $|f_n(x)| \leq g(x)$ h.h.h. olacak şekilde bir $g \in L$ fonksiyonu var ise, $f \in L$ olduğunu ve $\int_a^b f(x)dx = \lim \int_a^b f_n(x)dx$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz. (Not: M.Y.T. ni kullanınız.)
- Süreklili fonksiyonlar uzayının tamlanışının $R[a, b]$ uzayı olmadığını fakat $L[a, b]$ uzayı olduğunu gösteriniz. (Not: Süreklili fonksiyonlar uzayının basamak fonksiyonları uzayında yoğun olduğunu kullanınız.)

Cevaplar

- $f(x) = |x|$ fonksiyonunun Fourier serisini $-\pi \leq x \leq \pi$ kümesi üzerinde hesaplayalım.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, \dots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

f nin $[-\pi, \pi]$ deki Fourier serisi olduğunu biliyoruz. $f(x) = |x|$ çift fonksiyon olduğundan $b_n = 0$ dir.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{x^2}{\pi} \Big|_{x=0}^{x=\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|x| \cos 2n\pi x}_{\text{çift}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{n} x \sin nx \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} \cos nx \Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$$

dir. O halde

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

bulunur.

- $\varphi(x) = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{I_j}(x), \psi(x) = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{I_i}(x)$ basamak fonksiyonları ve $\cup_{j=1}^n I_j = \cup_{i=1}^m I_i = [a, b]$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\varphi + \psi &= \sum_{j=1}^n b_j \chi_{I_j} + \sum_{i=1}^m a_i \chi_{I_i} = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{I_j \cap [a,b]} + \sum_{i=1}^m a_i \chi_{I_i \cap [a,b]} \\
&= \sum_{j=1}^n b_j \chi_{I_j \cap (\cup_{i=1}^m I_i)} + \sum_{i=1}^m a_i \chi_{I_i \cap (\cup_{j=1}^n I_j)} = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{\cup_{i=1}^m (I_j \cap I_i)} + \sum_{i=1}^m a_i \chi_{\cup_{j=1}^n (I_i \cap I_j)} \\
&= \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^m \chi_{I_j \cap I_i} + \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^n \chi_{I_i \cap I_j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (a_i + b_j) \chi_{I_j \cap I_i}
\end{aligned}$$

O halde $\varphi + \psi$ fonksiyonu $I_j \cap I_i$ aralıkları üzerinde $a_i + b_j$ sabit değerlerini alan bir basamak fonksiyonudur. İntegrali için $I_j \cap I_i$ aralıkları ayrık olduklarından

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\varphi + \psi)(x) dx &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (a_i + b_j) |I_j \cap I_i| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_i |I_j \cap I_i| + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_j |I_j \cap I_i| \\
&= \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^n |I_j \cap I_i| + \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^m |I_j \cap I_i| = \sum_{i=1}^m a_i \left| \bigcup_{j=1}^n (I_j \cap I_i) \right| + \sum_{j=1}^n b_j \left| \bigcup_{i=1}^m (I_i \cap I_j) \right| \\
&= \sum_{i=1}^m a_i \left| I_i \cap \bigcup_{j=1}^n I_j \right| + \sum_{j=1}^n b_j \left| I_j \cap \bigcup_{i=1}^m I_i \right| = \sum_{i=1}^m a_i |I_i \cap [a,b]| + \sum_{j=1}^n b_j |I_j \cap [a,b]| \\
&= \sum_{i=1}^m a_i |I_i| + \sum_{j=1}^n b_j |I_j| = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx
\end{aligned}$$

bulunur.

3. a. $f \in R[a,b]$ iken $f \in L^+[a,b]$ olduğunu gösterelim:

$[a,b]$ 'nin bölüntüsü P_n olsun

$$P_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2^n} = b$$

öyleki $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{2^n}$ olsun. Bu bölüntü için $m_k = \inf\{f(x) : x \in I_k\}$ ve $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ olmak üzere

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{2^n} m_k \chi_{I_k}$$

şeklinde tanımlı bir φ_n basamak fonksiyonunu eşleyelim. O halde $[a,b]$ üzerinde *h. h. h.* $\varphi_n \uparrow f$ dir. Bu yüzden $f \in L^+$ ve L^+ sınıfı anlamında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

dir. Diğer bir taraftan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

dir Eğer f Riemann integrallenebilirse alt Darboux integrali Riemann integraline eşit olacağından

$$(L^+) \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (R)$$

bulunur.

- b. $L^+[a,b]$ nın $R[a,b]$ den çok daha geniş bir küme olduğunu gösterelim:

Biliyoruzki Dirichlet fonksiyonu $D(x)$, x irrasyonelse 0 ve x rasyonelse 1 'e eşittir ve Riemann integrallenebilir fonksiyonlar uzayı içinde olmadığını biliyoruz. Bu yüzden $D(x)$ 'in L^+ sınıfında olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$(\varphi_n(x)) = (0)$ basamak fonksiyonlarının dizisi monoton azalmayıdır ve $\forall n$ için

$\int_a^b \varphi_n(x) dx = 0$ sınırlıdır. $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n(x)) = D(x)$ *h. h. h.* olduğundan $D(x) \in L^+$ ve

$$\int_a^b D(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = 0$$

dır.

4. Eğer L sınıfındaki fonksiyonların bir dizisi (f_n) *h. h. h.* bir f fonksiyonuna yakınsa. Şimdi M.Y.T. ni kullanmak için (f_n) den iki monoton dizi aşağıdaki şekilde oluşturabiliriz.

f_n ler integrallenebilir ve integrallenebilir fonksiyonların maksimum ve minimumlarında integrallenebilir olduğundan

$$g_{nk} = \max\{f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k}\} \in L$$

$$h_{nk} = \min\{f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k}\} \in L$$

dir. Her n için $|f_n(x)| \leq g(x)$ ($h.h.h.$) olacak şekilde bir $g \in L$ fonksiyonu var ve $g_{nk} \leq g$ ve $-g \leq h_{nk}$ olduğundan her k için

$$\int_a^b g_{nk}(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \text{ve} \quad - \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b h_{nk}(x) dx$$

dir. Bu yüzden M.Y.T. den $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{nk} = g_n$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} h_{nk} = h_n$ fonksiyonları integrallenebilirdir.

$$g_n = \sup\{f_n, f_{n+1}, \dots\} \quad \text{ve} \quad h_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}$$

olmak üzere geniş küme üzerinde alınan supremum daha büyük infimum ise daha küçük olduğundan (g_n) monoton azalan ve (h_n) monoton artandır (f_n) in limiti ile sup ve infinin limiti aynı olduğundan $\lim g_n = \lim h_n = f$ ($h.h.h.$) dir. Hem (g_n) hemde (h_n) monoton ve $h.h.h.$ f ye yakınsadıklarından M.Y.T.den $f \in L$ ve

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \int_a^b g_n(x) dx = \lim \int_a^b h_n(x) dx$$

dir. Diğer taraftan, $h_n(x) \leq f_n(x) \leq g_n(x)$ ve böylece

$$\int_a^b h_n(x) dx \leq \int_a^b f_n(x) dx \leq \int_a^b g_n(x) dx$$

dir. Buradan

$$\lim \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

dir.

5. $f \in L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $\exists g \in C[a, b]$ vardır öyleki $\|f - g\| < \varepsilon$; yani $C[a, b]$, L 'de yoğundur. Sürekli fonksiyonlar uzayının basamak fonksiyonları uzayında yoğun olduğundan $\varepsilon > 0$ için $[a, b]$ de bir basamak fonksiyonu φ için öyle bir g sürekli fonksiyonu vardır ki

$$\|\varphi - g\| < \varepsilon \quad 1$$

dur. Şimdi L^+ sınıfı fonksiyonları için önermeyi ispatlayalım.

$f \in L^+$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. O halde $[a, b]$ 'de bir φ basamak fonksiyonu vardır öyleki

$$\|f - \varphi\| < \varepsilon \quad 2$$

dur. Gerçekten, $h.h.h.$ f 'ye yakınsayan basamak fonksiyonlarının monoton artan bir dizisini seçelim. O halde $(f - \varphi)$ $h.h.h.$ 0 'a monoton azalır, ve böylece M.Y.T.den

$$\lim \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)| dx = \lim \int_a^b [f(x) - \varphi_n(x)] dx = 0$$

dir. Şimdi önermeyi L sınıfı fonksiyonları için ispatlayalım.

$f \in L$ olsun ve $f_1, f_2 \in L^+$ olacak şekilde $f = f_1 - f_2$ olsun. $\varepsilon > 0$ için ref: 1 den $j = 1, 2$ için $\|f_j - \varphi_j\| < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde φ_1 ve φ_2 fonksiyonlarını buluruz. O halde, ref: 2 den bir sürekli g fonksiyonu bulunur öyleki $\|g - (\varphi_1 - \varphi_2)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ 'tür. Böylece

$$\begin{aligned} \|f - g\| &= \|(f_1 - f_2) - g\| \\ &\leq \|(f_1 - f_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)\| + \|(\varphi_1 - \varphi_2) - g\| \\ &\leq \|f_1 - \varphi_1\| + \|f_2 - \varphi_2\| + \|(\varphi_1 - \varphi_2) - g\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur.