

MAT 301 Gerçel Analiz I Güz 2008-2009 Ara sınavı
Sorular

1. a. F Cantor üçlük kümesi ile terimleri $\{0, 1\}$ den oluşan tüm diziler kümesi $2^{\mathbb{N}}$ nin denk olduklarını gösteriniz.
b. $2^{\mathbb{N}}$ ile $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ doğal sayıların kuvvet kümesinin denk olduklarını gösteriniz. (yol gösterme:
 $a = \{a_n\} \mapsto g(a) = \{n \in \mathbb{N} : a_n = 1\}$ fonksiyonunu göz önüne alın.)
c. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ile \mathbb{R} nin denk kümeler olduklarını gösteriniz.
2. Sıfır ölçümlü kümeyi tanımlayınız. Eğer $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n ölçümü sıfır olan kümeler ise A nın ölçümünde sıfırdır gösteriniz. Varsa sayılabilir olmayan fakat sıfır ölçümlü küme örneğini gösteriniz.
3. Sayılabilirliği tanımlayınız ve düzlemin rasyonel bileşenli bütün noktalar kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz. (yani $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$)
4. $f: X \rightarrow Y$ örten dönüşüm ise $B \subset Y$ için

$$f[f^{-1}(B)] = B$$

olduğunu gösteriniz.

5. $f(x) = x$ fonksiyonunun Fourier serisini $\frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ve $0 \leq x \leq 1$ kümeleri üzerinde ayrı ayrı hesaplayınız.
6. Hemen hemen her yerde (h. h. h.) kavramını tanımlayınız. $[a, b]$ üzerinde Riemann integrallenemeyen fakat Riemann integrallenebilen bir fonksiyona h.h.h. eşit olan bir fonksiyon örneğini veriniz.
7. Sürekli fonksiyonlar uzayının tamlanışının Riemann integrallenebilir fonksiyonlar uzayı olmadığını bir örnekle gösteriniz.

Cevaplar

1. a. F Cantor üçlük kümesi ile terimleri $\{0, 1\}$ den oluşan tüm diziler kümesi $2^{\mathbb{N}}$ nin denktirler. Cantor kümesi tanımından her $x \in F$ için $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ şeklinde yazılabilir öyleki x_n sadece 0 veya 2 dir. Yani, Cantor kümesi üçlük açılımları sadece 0 ve 2 rakamlarını içeren $[0, 1]$ deki reel sayılardan oluşur. Bunu kullanarak toplamdaki x_n dizisinden terimleri 0 veya 1 den oluşan bir dizi elde edebiliriz. $\forall x \in F$ için $f(x) = \left\{ \frac{x_n}{2} \right\}_{n=1}^{\infty} \in 2^{\mathbb{N}}$ şeklinde tanımlı fonksiyon $F \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ ye 1 - 1 ve örtendir.
1 - 1 **lik**: $x \neq y$ ise $\exists n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq y_n$ dir. O halde $\frac{x_n}{2} \neq \frac{y_n}{2}$ olduğundan $\left\{ \frac{x_n}{2} \right\}_{n=1}^{\infty} \neq \left\{ \frac{y_n}{2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ yani $f(x) \neq f(y)$ dir.
Örtenlik: x_n 0 veya 1 olmak üzere $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in 2^{\mathbb{N}}$ için $\exists x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n} \in F$ var olduğundan f örtendir.
- b. $2^{\mathbb{N}}$ ile $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ doğal sayıların kuvvet kümesinin denk oldukları: a_n 0 veya 1 olmak üzere $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto g(a) = \{n \in \mathbb{N} : a_n = 1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ fonksiyonunu göz önüne alalım.
g fonksiyonu 1 - 1 dir: $a \neq b \Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \neq \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ için $a_n \neq b_n$ dir. O halde $a_n = 1$ ise $b_n = 0$ veya $a_n = 0$ ise $b_n = 1$ dir. O halde g nin tanımından $n \in g(a) \Rightarrow n \notin g(b)$ veya $n \notin g(a) \Rightarrow n \in g(b)$ dir. Buradan $g(a) \neq g(b)$ bulunur.
g fonksiyonu örten dir: $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ için A ya ait doğal sayıları indis olarak alarak o indisli terimleri 1 diğer tüm terimleri 0 olan dizi $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in 2^{\mathbb{N}}$ dir öyleki $g(a) = \{n \in \mathbb{N} : a_n = 1\} = A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dir.
- c. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ile \mathbb{R} nin denk kümelerdir çünkü $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nin kardinalitesi 2^{\aleph_0} ile \mathbb{R} nin kardinalitesi c birbirine eşittir. (Continum Hipotezi) Denk kümeler olduklarından aralarında bijektif bir dönüşüm vardır. NOT: Bu dönüşüm şu şekilde kurulabilir. İlk olarak: Eğer A sonsuz bir küme ve $B/f(A)$ kümesi sonlu veya sayılabilir olacak şekilde $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu 1 - 1 oluyor ise, o zaman A ile B nin denk kümelerdir önermesini gösteririz. İkinci olarak: $(0, 1)$ aralığındaki reel sayıların $[0, 1)$ ve $(0, 1]$ kullanılarak elde edilen ikilik gösteriliminin farklı olduğu noktalar kümesinin sayılabilir olduğunu söyleriz. (Örneğin $\frac{1}{2} \in (0, 1)$ için $[0, 1)$ bölüntüleri ile $\frac{1}{2} = 0,0\bar{1}$ ikilik açılımına sahipken $(0, 1]$ bölüntüleri ile $\frac{1}{2} = 0,1$ ikilik açılımına sahiptir. Bu şekilde $\frac{1}{2}$ nin kuvvetleri farklı ikilik açılımlara sahiptir.) Üçüncü olarak: $\forall x \in (0, 1)$ için $x = 0, k_1 k_2 k_3 \dots$ $[0, 1]$ ile elde edilen ikilik gösterilimi için $f(x) = \{n \in \mathbb{N} : k_n = 1\}$ fonksiyonunu ele alırız. (NOT: f nin iyi tanımlı olabilmesi için her elemanın tek bir ikilik açılımı olmalıdır aksi halde örneğin $\frac{1}{2}$ nin görüntüsü hem $f(\frac{1}{2}) = \{1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ hemde $f(\frac{1}{2}) = \{2, 3, 4, \dots\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ olurdu.) Gösteririz ki $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{0, 1\}$ sayılabilir olacak şekilde $f: (0, 1) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ nin birebir olduğunu kullanıp ilk gösterdiğimiz önermeden $(0, 1) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$ elde edilir. Böylece $(0, 1) \approx \mathbb{R}$ olduğundan ispat biter.

2. Tanım: \mathbb{R} nin bir A alt kümesinin ölçümü sıfırdır eğer her $\varepsilon > 0$ için I_1, I_2, \dots açık aralıklar dizisi vardır öyleki

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \varepsilon$$

dır. A_n ölçümü sıfır olan kümeler, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Her bir n için A_n kümeleri I_{nk} , $k = 1, 2, \dots$ aralıkları tarafından örtülebilir. Burada

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

dir. O halde I_{nk} aralıkları $n, k = 1, 2, \dots$ için

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup \{I_{nk} : n, k \in \mathbb{N}\}$$

sağlanır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_{nk}| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

dur. Sonuç olarak A nın ölçümünde sıfırdır. Şimdi örnek olarak Cantor üçlük kümesini verelim.

Cantor üçlük kümesi F_n kümelerinin arakesit kümesi olarak biliyoruz. Cantor üçlük kümesinin ölçümü sıfırdır. $\varepsilon > 0$ olsun. O halde $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$ olacak şekilde n vardır. $F \subset F_n$ ve F_n aralıklarının toplam uzunluğu $F_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ olduğundan, F 'nin ölçümü sıfırdır.

Cantor üçlük kümesinin sayılamazlığı için F Cantor kümesinin her bir x noktası tek olarak $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ şeklindeki seri ile gösterilebilir. Burada her a_n ya 0 yada 2 dir ve böylece gösterilen her x sayısı F dedir önermesini kullanıyoruz. $\{x_1, x_2, \dots\}$ F nin sayılabilir bir alt kümesi olsun

$$x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots,$$

$$x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots,$$

$$x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots,$$

.....

$a_{ij} = 0$ veya 2 olmak üzere üçlük gösterimleri olsun. Şimdi

$$a_n = \begin{cases} 0, & a_{nn} = 2 \text{ ise} \\ 2, & a_{nn} = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

sayısını tanımlayalım. O halde $x = 0.a_1a_2a_3\dots$ sayısı önermeden F 'dedir fakat yukarıdaki listede değildir. Böylece F 'nin her sayılabilir alt kümesi F 'deki en az bir reel sayıdan eksik olacaktır. Bu F 'nin sayılamaz olduğunu gösterir.

3. \mathbb{N} doğal sayılar kümesiyle eş kuvvetli olan her X kümesine sayılabilir küme denir. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Bir X kümesinin sayılabilir olması için gerek ve yeter koşul bu kümenin terimleri ikişer farklı bir dizi şeklinde gösterilebilir olmasıdır önermesinden $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ öyleki $n \neq m$ için $r_n \neq r_m$ dir. $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(r', r'') : r', r'' \in \mathbb{Q}\}$ yazılırsa $A_n = \{(r_n, r_m) : m \in \mathbb{N}\}$ için $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olduğu açıktır. Eğer A_n kümelerinin sayılabilir olduklarını gösterebilirsek, sayılabilir kümelerin sayılabilir birleşimide sayılabilir olacağından A kümesinin sayılabilir olduğunu göstermiş oluruz. n sabit olmak üzere $f : A_n \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu $f((r_n, r_m)) = m$ ile tanımlanırsa 1-1 ve örtendir. n sabit olduğundan $(r_n, r_m) \neq (r_n, r_k)$ için $m \neq k$ olacağından $f((r_n, r_m)) \neq f((r_n, r_k))$ bulunur yani f injektiftir. f örtendir çünkü $\forall m \in \mathbb{N}$ için $(r_n, r_m) \in A_n$ dir. O halde $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesi sayılabilir dir.

2.Yol: $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ için $n \neq m$ iken $r_n \neq r_m$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{array}{ccccc} (r_1, r_1) & \rightarrow & (r_1, r_2) & & (r_1, r_3) & \rightarrow \\ & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow \\ (r_2, r_1) & & (r_2, r_2) & & (r_2, r_3) & \\ & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & \swarrow \\ (r_3, r_1) & & (r_3, r_2) & & (r_3, r_3) & \\ & \swarrow & & \swarrow & & \end{array}$$

sıralaması ile $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ terimleri ikişer farklı bir dizi şeklinde yazılabilir dir. Yani $n \neq n'$ veya $m \neq m'$ için $r_n \neq r_{n'}$ veya $r_m \neq r_{m'}$ olduğundan $\forall n, m, n', m' \in \mathbb{N}$ için $(r_n, r_m) \neq (r_{n'}, r_m)$, $(r_n, r_m) \neq (r_n, r_{m'})$ ve $(r_n, r_m) \neq (r_{n'}, r_{m'})$ dir.

4. $B \subset Y$ için

$$\begin{aligned}y \in f[f^{-1}(B)] &\Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B), y = f(x) \\&\Rightarrow \exists x \in X, f(x) \in B, y = f(x) \\&\Rightarrow f(x) = y \in B\end{aligned}$$

olduğundan $f[f^{-1}(B)] \subset B$ dir. Şimdi f örten olduğundan $B \subset f[f^{-1}(B)]$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}y \in B &\Rightarrow \text{Örtenlikten } y = f(x) \in B \text{ olacak şekilde } \exists x \in X \text{ vardır.} \\&\Rightarrow \exists x \in X, x \in f^{-1}(B), y = f(x) \\&\Rightarrow f(x) \in f[f^{-1}(B)], y = f(x) \\&\Rightarrow y \in f[f^{-1}(B)]\end{aligned}$$

yani $B \subset f[f^{-1}(B)]$ dir.

5. $f(x) = x$ fonksiyonunun Fourier serisini $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ve $0 \leq x \leq 1$ kümeleri üzerinde ayrı ayrı hesaplayalım.

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, \dots \\b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

f nin $[-\pi, \pi]$ deki Fourier serisi olduğunu biliyoruz.. Benzer şekilde $x' = 2\pi x$ değişken dönüşümüyle $f(x) = 2\pi x$ için

$$\begin{aligned}a_n &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cos 2n\pi x dx, \quad n = 0, 1, \dots \\b_n &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \sin 2n\pi x dx, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2k\pi x + b_k \sin 2k\pi x)$$

yazılabilir. Buradan tek fonksiyonların simetrik kümeler üzerindeki integralleri sıfır olduğundan

$$a_n = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \underbrace{x \cos 2n\pi x}_{\text{tek}} dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

ve

$$\begin{aligned}b_n &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x \sin 2n\pi x dx = \frac{-2x}{2n\pi} \cos 2n\pi x \Big|_{x=-\frac{1}{2}}^{x=\frac{1}{2}} + \frac{2}{2n\pi} \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos 2n\pi x dx}_{=0} \\&= \frac{-1/2}{n\pi} \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} - \frac{-(-1/2)}{n\pi} \underbrace{\cos(-n\pi)}_{(-1)^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

dir. O halde

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin 2k\pi x = \frac{\sin 2\pi x}{\pi} - \frac{\sin 4\pi x}{2\pi} + \frac{\sin 6\pi x}{3\pi} - \dots$$

bulunur. Benzer şekilde $0 \leq x \leq 1$ için

$$a_0 = 2 \int_0^1 x dx = x^2 \Big|_{x=0}^{x=1} = 1$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 x \cos 2n\pi x dx = \frac{2x}{2n\pi} \sin 2n\pi x \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{2}{2n\pi} \int_0^1 \sin 2n\pi x dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \underbrace{\sin 2n\pi}_{=0} - \frac{2}{2n\pi} \int_0^1 \sin 2n\pi x dx = \frac{1}{2n^2\pi^2} \underbrace{(\cos 2n\pi - 1)}_{=0} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 x \sin 2n\pi x dx = \frac{-2x}{2n\pi} \cos 2n\pi x \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{2n\pi} \int_0^1 \cos 2n\pi x dx \\ &= \frac{-1}{n\pi} \underbrace{\cos 2n\pi}_{=1} = \frac{-1}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

olduğundan

$$x = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k\pi} \sin 2k\pi x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \dots \right)$$

bulunur.

- Hemen hemen her yerde kavramı: Eğer bir özellik ölçümü sıfır olan bir küme dışında sağlanıyor ise o özellik hemen hemen her yerde sağlanır denir. Örneğin, eğer bir fonksiyonun süreksiz olduğu noktalar kümesi sıfır ölçümlü ise o fonksiyona h.h.h. süreklidir denir. Riemann integrallenemediği halde Riemann integrallenebilir bir fonksiyona h.h.h. eşit olan fonksiyon Dirichlet fonksiyonudur. $D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Dirichlet fonksiyonu irrasyonelde 0 ve rasyonellerde 1 değerini alsın. Riemann integrallenebilirlik için gerek ve yeter şart fonksiyonun h.h.h. sürekli olması gerektiğini biliyoruz. Fakat, $D(x)$ in süreksiz olduğu noktalar kümesi $[0, 1]$ kapalı aralığının ölçümü sıfırdan farklı olduğundan dolayı Riemann integrallenemezdir diyebiliriz. Yada alt ve üst Darboux integrallerinin sırasıyla 0 ve 1 olduklarını gösterebiliriz. O halde D Riemann integrallenemezdir. Fakat $\{x \in [0, 1] : D(x) \neq 0\} = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ sıfır ölçümlü olduğundan $D(x) = 0$ h.h.h. ve $f(x) = 0$ Riemann integrallenebilir. Dolayısıyla D Riemann integrallenebilir bir fonksiyona h.h.h. eşittir.

$$2. f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{(n+1)} \text{ için} \\ n^{\frac{3}{2}}[(n+1)x - 1], & \frac{1}{(n+1)} \leq x \leq \frac{1}{n}, \text{ için} \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \text{ için} \end{cases} \quad d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \text{ metriği için } C[0, 1] \text{ 'de}$$

bir Cauchy dizisidir fakat Riemann integrallenebilir fonksiyonlar içinde limiti yoktur.

$n > m + 1$ olsun $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m}$ dir.

$$\begin{aligned} d(f_n, f_m) &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx = \left(\int_0^{\frac{1}{n+1}} + \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m+1}} + \int_{\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{m}} + \int_{\frac{1}{m}}^1 \right) |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n+1}} |0 - 0| dx + \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left| n^{\frac{3}{2}}[(n+1)x - 1] - 0 \right| dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m+1}} \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - 0 \right| dx + \\ &\quad \int_{\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{m}} \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - m^{\frac{3}{2}}[(m+1)x - 1] \right| dx + \int_{\frac{1}{m}}^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| dx \end{aligned}$$

$m, n \rightarrow \infty$ için $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}$, $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m+1}}$, $\int_{\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{m}}$ integralleri \int_0^1 olacağından ve ilk ve son integrallerde sıfır olduğundan $d(f_n, f_m) \rightarrow 0$ olduğu görülür.

$\lim f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ h.h.h. olduğundan ve $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sınırlı olmadığından Riemann integrallenebilir değildir.

Yrd. Doç. Dr. Can Murat Dikmen